Soluții

1. a) $\det(A) = -4$.

b) Pentru $n=1$, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A + 2I_3$, deci $P(1)$ este adevărată.

Dacă $P(n)$ este adevărată atunci

$$A^{2(n+1)} = A^{2n} \cdot A^2 = \left(\frac{2^{2n}-1}{3} A + \frac{2^{2n}+2}{3} I_3 \right)(A + 2I_3) = \frac{2^{2(n+1)}-1}{3} A + \frac{2^{2(n+1)}+2}{3} I_3 .$$

c) Se arată că $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$ deci $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1) = -(-x_1-1)(-x_2-1)(-x_3-1) = -P(-1) = -a$ sau se folosesc relațiile lui Viète.

b) $x_1 = 2 \Rightarrow a = -6$. Celelalte rădăcini sunt soluțiile ecuației $x^2 + 2x + 3 = 0$, deci $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$.

c) $a = 0$ este soluție.

Pentru $a \neq 0$, din primele două relații ale lui Viète rezultă $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \cdot x_3 = -1 \end{cases}$.

Se obține $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 1 = 0$. Din $\Delta_{x_1} \geq 0$ și $x_2 \neq 0$ rezultă $x_2^2 = 1$.

Rezultă $x_3 = 0$, fals. Așadar $a = 0$ este unica soluție.